5 粒子系の力学

本章では, N個の粒子が互いに力を及 ぼし合っている粒子系を考える。
粒子間に働く力は相互作用(interaction)とよばれ,電磁気的力かもしれないし,衝突による力でもよい。
このように,多数の粒子が相互作用をしている粒子系での力学的法則を考える。

5.1 粒子系に関するニュートンの法則

5.1.1 2 体系の運動方程式と運動量保存則

【運動方程式】

簡単のためにまず2体の場合を考える。
粒子1と粒子2それぞれの質量をm_1, m_2とし, それぞれの座標を$\vec{r_1}$, $\vec{r_2}$と表す。
粒子1の運動方程式は

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{2\to 1} + \vec{F}_1^{\mathrm{e}} \tag{5.1}$$

ここで, $\vec{F}_{2\to 1}$は粒子2が粒子1に及ぼす力であり、$\vec{F_1^e}$はそれ以外の力で,
外力(external force)とよぶ 。粒子2の方程式も同様に書くことができて

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{1\to 2} + \vec{F}_2^{\mathrm{e}} \tag{5.2}$$

式 (5.1) と式 (5.2) が, 2 体系の運動方程式である.

【運動量】

ニュートンの第3法則(作用 反作用の法則)から,粒子1が粒子2に及ぼす力は,
粒子2が粒子1に及ぼす力と大きさが同じで向きが反対なので

$$\vec{F}_{1\to 2} = -\vec{F}_{2\to 1} \tag{5.3}$$

2体の場合2つの運動方程式を加えると

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_1^{\mathrm{e}} + \vec{F}_2^{\mathrm{e}} \tag{5.4}$$

外力がない場合

$$\frac{d}{dt}(m_1\dot{\vec{r}} + m_2\dot{\vec{r}}) = \vec{0} \tag{5.5}$$

運動量 $\vec{p}_i = m_i\dot{\vec{r}}_i$ を導入すると,

$$\vec{P} \equiv \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{一定} \tag{5.6}$$

この式は運動量の和が 時間変化せず一定であることを意味する。
力が2体間の相互作用だけで他に外力がない場合,運動量の和,すなわち全運動量は保存する。

5.1.2 粒子系の運動方程式と運動量保存

【粒子系の運動方程式】

N 個の粒子の質量と座標を $m_n,\ \vec{r}_n\ (n=1,\cdots,N)$ で表す

n 番目の粒子の運動方程式は

$$
\begin{aligned}
m_n\ddot{\vec{r}}_n &= (\vec{F}_{1\to n}+\vec{F}_{2\to n}+\cdots+\vec{F}_{N\to n})+\vec{F}_n^{\mathrm{e}} \\
&= \sum_{\substack{l=1 \\ (l\neq n)}}^{N}\vec{F}_{l\to n}+\vec{F}_n^{\mathrm{e}} \qquad (5.7)
\end{aligned}
$$

力の和に自分自身からの力 $F_{n\to n}$ の項はない.

【孤立系と運動量】

作用・反作用の法則は, n 番目と l 番目の2粒子間に働く力に関して

$$
\vec{F}_{n\to l}=-\vec{F}_{l\to n} \qquad (5.8)
$$

運動方程式 (5.7) を粒子のラベル n についてすべて加えると

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2 + \cdots + m_N\ddot{\vec{r}}_N = \sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{\substack{l=1\\(l\neq n)}}^{N}\vec{F}_{l\to n} + \vec{F}_n^{\mathrm{e}}\right) = \sum_{n=1}^{N}\vec{F}_n^{\mathrm{e}} \tag{5.9}$$

粒子間の力は相殺して外力のみによる方程式になる.

N個の粒子が相互に及ぼす力以外に外部からの力を受けずに運動している場合を考える。
このような系を孤立系 (isolated system)とよぶ。
孤立系の場合, 運動方程式は,

$$\frac{d}{dt}(m_1\dot{\vec{r}}_1 + m_2\dot{\vec{r}}_2 + \cdots + m_N\dot{\vec{r}}_N) = \frac{d}{dt}\sum_{n=1}^{N} m_n\dot{\vec{r}}_n = \vec{0} \tag{5.10}$$

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots + \vec{p}_N = \sum_{n=1}^{N}\vec{p}_n = \sum_{n=1}^{N} m_n\dot{\vec{r}}_n = \text{一定} \tag{5.11}$$

運動量の総和, すなわち全運動量 $\vec{P}$ が保存することを意味している.

問題　ロケットは後方にガスを高速で噴射して推力を得る。時刻 t におけるロケットの速度を v とし、その質量を m とする。時間 dt のあいだに質量 $-dm$ $(dm < 0)$ のガスをロケットに対して u の速度で後方に噴出し、ロケットの速度が dv だけ増加したとする。ロケットの速度が、噴出ガスの速度 u と等しくなる時、ロケットの質量はいくらか。
ただし、重力などの外力は無視し、 $t = 0$ におけるロケットの質量を m_0、速度を 0 とする。

運動量保存則を考える。時刻 t における運動量は mv である。t + Δt におけるロケットの運動量は (m+dm)(v+dv)、噴出されたガスの運動量は –dm(v – u) であるので、系全体の運動量は (m+dm)(v+dv) –dm(v – u) である。これが mv に等しいので

mv = (m+dm)(v+dv) –dm(v – u)

右辺の第一項を展開して、微少量の二次項 dmdv を無視すると、

0 = mdv + u dm

$$\frac{dv}{u} + \frac{dm}{m} = 0$$

t = 0 で v = 0, m = m0 とすると

$$\frac{v}{u} = \log\frac{m_0}{m}$$

v = u のとき、m0/m=e=2.7183 m = m0/2.718 = 0.368 m0

補足問題：速度に比例する空気抵抗を受けて振動するばねのおもり P の位置が次の微分方程式で表される時の運動を調べよ。

$$\ddot{x} + \frac{2}{3}\dot{x} + \frac{37}{9}x = 0$$

$t = 0$ の時、$x = 0,\ \dot{x} = 2$ とする。

$x = e^{\lambda t}$　とおいて微分方程式に代入すると

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + \frac{2}{3}\lambda e^{\lambda t} + \frac{37}{9}e^{\lambda t} = 0$$

$$\lambda^2 + \frac{2}{3}\lambda + \frac{37}{9} = 0$$ 特性方程式

$$9\lambda^2 + 6\lambda + 37 = 0$$

$$\lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 9 \cdot 37}}{9} = \frac{-3 \pm 18i}{9}$$

$$\lambda_1 = -\frac{1}{3} + 2i \quad \lambda_2 = -\frac{1}{3} - 2i$$

一般解は

$$x = A_1 e^{-\frac{1}{3}t+2ti} + A_2 e^{-\frac{1}{3}t-2ti}$$

$$= e^{-\frac{1}{3}t}(A_1 e^{2ti} + A_2 e^{-2ti}) \qquad e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$= e^{-\frac{1}{3}t}\{A_1(\cos 2t + i\ \sin 2t) + A_2(\cos 2t + i\ \sin 2t)\}$$

$$= e^{-\frac{1}{3}t}\{(A_1+A_2)\cos 2t + i(A_1-A_2)\ \sin 2t)\}$$

$$= e^{-\frac{1}{3}t}(B_1\cos 2t + B_2\sin 2t) \qquad B_1 = A_1 + A_2 \qquad B_2 = i(A_1-A_2)$$

$t=0$ の時、$x = 0$, $\dot{x} = 2$

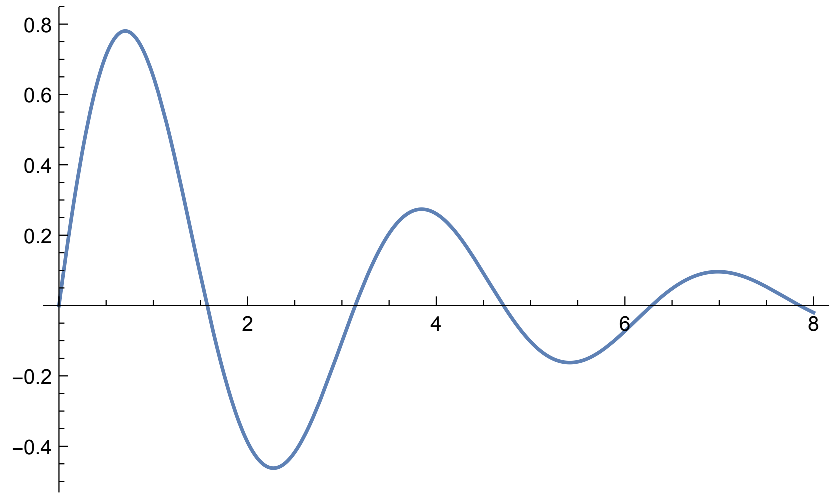
$$x(0) = e^0(B_1\cos 0 + B_2\sin 0) = B_1 = 0$$

$$x(t) = B_2 e^{-\frac{1}{3}t}\sin 2t$$

$$\dot{x}(t) = B_2(-\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}t}\sin 2t + 2e^{-\frac{1}{3}t}\cos 2t)$$

$$\dot{x}(0) = B_2(-\frac{1}{3}e^0\sin 0 + 2e^0\cos 0) = 2B_2 = 2 \qquad B_2 = 1$$

$$x(t) = e^{-\frac{1}{3}t}\sin 2t$$



5.2 重心の運動

【重心】 粒子系の運動方程式は，N 個の粒子それぞれの運動方程式であるが，全運動量の保存則は全体の運動に関する情報を与えている．N 個の粒子からなる孤立系では，その全質量は

$$M \equiv \sum_{n=1}^{N} m_n \tag{5.12}$$

全運動量を

$$\vec{P} = M\vec{V} \tag{5.13}$$

$$\vec{V} = \sum_{n=1}^{N} \frac{m_n \dot{\vec{r}}_n}{M} \tag{5.14}$$

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots + \vec{p}_N = \sum_{n=1}^{N} \vec{p}_n = \sum_{n=1}^{N} m_n \dot{\vec{r}}_n$$

はこの粒子系の速度と考えられる．

質量中心,すなわち重心(center of mass,cellter of gravity)の座標 を

$$\vec{R}_{\mathrm{G}} \equiv \frac{m_1\vec{r}_n + m_2\vec{r}_2 + \cdots + m_N\vec{r}_N}{M} = \sum_{n=1}^{N} \frac{m_n\vec{r}_n}{M} \tag{5.15}$$

式 (5.14) の $\vec{V}$ は重心の速度

$$\vec{V} = \dot{\vec{R}}_{\mathrm{G}} \tag{5.16}$$

全運動量 = 全質量 × 重心の速度

【重心の運動方程式】

粒子系に関する運動方程式 (5.9) は

$$\dot{\vec{P}} = \sum_n \vec{F}_n^{\mathrm{e}} \tag{5.17}$$

と書け，粒子系の重心の運動方程式と理解できる．したがって，粒子系の重心の運動は外力の和，すなわち合力によって決まる．さらに，外力の総和が $\vec{0}$ ならば全運動量は保存し，重心は速度 $\vec{V}$ で等速度運動をする．

5.3　相対運動とエネルギー保存

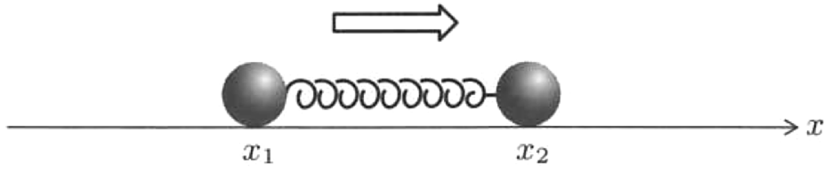
粒子が多数あり，互いに相互作用をしていても孤立系であれば全運動量が保存する

では，運動エネルギーはどうなっているのだろうか．

2 粒子の孤立系を考える．さらに，2 個の粒子は，質量の無視できるばね定数が k で自然長が l のばねでつながれているとしよう．

5.3.1　1 次元連成振動

【重心運動】　　運動は x 方向にのみ起こる



運動方程式は

$$
\begin{aligned}
m_1\ddot{x}_1 &= -k(x_1 - x_2 + l),\\
m_2\ddot{x}_2 &= -k(x_2 - x_1 - l) = k(x_1 - x_2 + l)
\end{aligned}
\tag{5.18}
$$

2 式の和をとれば，確かに全運動量は保存することがわかる．

よって，重心 (重心座標の成分を $\vec{R}_{\mathrm{G}} = (X_{\mathrm{G}}, Y_{\mathrm{G}}, Z_{\mathrm{G}})$ と書くことにする．いまは 1 次元問題なので X_{G} だけ) は等速度運動をする．したがって，定数 V_0 を用いて

$$X_{\mathrm{G}}(t) = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} = V_0t + X_{\mathrm{G}}(0) \tag{5.19}$$

【相対運動】

互いの相対的な関係はどうか．これは**相対運動** (relative motion)

2 粒子間の間隔

$$q_x \equiv x_1 - x_2 \tag{5.20}$$

これを**相対座標** (relative coordinate) とよぶ．

粒子 1 の方程式に m_2 を掛け，粒子 2 の方程式に m_1 を掛ける．

$$m_1 m_2 \ddot{x}_1 = -m_2 k(x_1 - x_2 + l) \qquad \cdots ①$$

$$m_1 m_2 \ddot{x}_2 = \quad m_1 k(x_1 - x_2 + l) \qquad \cdots ②$$

① − ②を求めると

$$m_1 m_2(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = -(m_1 + m_2)k(x_1 - x_2 + l) \tag{5.25}$$

上式を，相対座標 $q_x = x_1 - x_2$ と換算質量 $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ で表すと

相対運動の運動方程式

$$\mu \frac{d^2}{dt^2} q_x = -k(q_x + l) \tag{5.21}$$

ここで，$\tilde{q}_x = q_x + l$ という変数[2] を導入する．

ばねの自然長が l なので，$-\tilde{q}_x = (x_2 - x_1) - l$ は 2 体の平衡点からの距離の差を表す．

運動方程式は

$$\ddot{\tilde{q}}_x = -\omega^2 \tilde{q}_x \tag{5.23}$$

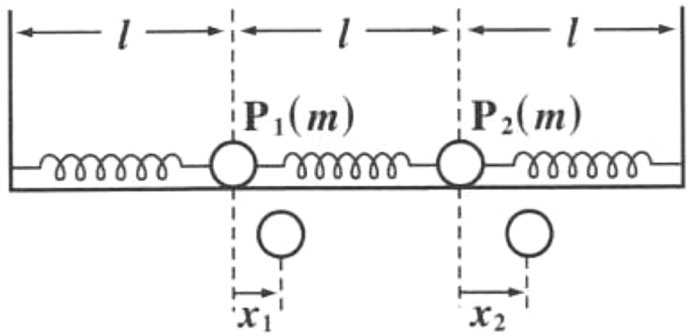
$$\omega^2 \equiv \left(\frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2}\right) = \frac{k}{\mu}$$

$\tilde{q}_x$ が角振動数 ω の単振動をする　相対距離は

$$x_2 - x_1 = -q_x = l - \tilde{q}_x = l - A\cos(\omega t + \alpha) \tag{5.24}$$

この2個の物体は, 間隔が l の状態を平衡点として単振動しながら,
系の重心が等速直線運動していることがわかる

問題：右図に示すように,質量 m の2つの質点 P_1, P_2 と自然長 l, ばね定数 k の質量を無視できる3本のバネとを連結して なめらかな水平面上におき, 両端点を $3l$ だけ隔てた壁面に固定する。ここで,質点 P_1と P_2 のつり合いの位置からの変 位をそれぞれ x_1, x_2 とおいて, x_1 と x_2 の運動方程式を立て,これを解いて P_1と P_2 の振動の様子を調べよ。



2つの質点の運動方程式は

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1)$$

$$m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) - kx_2$$

両式の和と差を作り、$x_\pm = (x_1 \pm x_2)/2$ とおくと、

$$m\ddot{x}_+ = -kx_+$$

$$m\ddot{x}_- = -3kx_-$$

$$x_+ = A\cos(\omega t + \alpha) \qquad x_- = B\cos(\sqrt{3}\omega t + \beta)$$

$$\omega = \sqrt{k/m}$$

$$x_1 = x_+ + x_- = A\cos(\omega t + \alpha) + B\cos(\sqrt{3}\omega t + \beta)$$

$$x_2 = x_+ - x_- = A\cos(\omega t + \alpha) - B\cos(\sqrt{3}\omega t + \beta)$$

連成振動は、異なる2つの角振動数を持つ単振動の重ね合わせ

5.3.2　力学的エネルギーの保存

ばねでつながれた 2 粒子系の力は，ポテンシャル

$$U(x_1, x_2) = \frac{1}{2}k(x_1 - x_2 + l)^2 \tag{5.27}$$

で与えられる保存力である．実際，それぞれの粒子に働く力 F_i は

$$\begin{aligned} F_1 &= -\frac{\partial U}{\partial x_1} = -k(x_1 - x_2 + l), \\ F_2 &= -\frac{\partial U}{\partial x_2} = k(x_1 - x_2 + l) \end{aligned} \tag{5.28}$$

この系の力学的エネルギー

$$E = T + U = \frac{1}{2}(m_1\dot{x}_1^2 + m_2\dot{x}_2^2) + U(x_1, x_2) \tag{5.29}$$

$$\frac{dE}{dt} = m_1\dot{x}_1\ddot{x}_1 + m_2\dot{x}_2\ddot{x}_2 + \dot{x}_1\frac{\partial U}{\partial x_1} + \dot{x}_2\frac{\partial U}{\partial x_2}$$
$$= m_1\dot{x}_1\ddot{x}_1 + m_2\dot{x}_2\ddot{x}_2 + \dot{x}_1 k(x_1 - x_2 + l) - \dot{x}_2 k(x_1 - x_2 + l)$$
$$= \dot{x}_1\{m_1\ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2 + l)\} + \dot{x}_2\{m_2\ddot{x}_2 - k(x_1 - x_2 + l)\}$$
$$= 0$$

したがって，力学的エネルギーは保存する．

ポテンシャルが相対座標にしかよらない場合

$$T = \frac{1}{2}(m_1\dot{x}_1^2 + m_2\dot{x}_2^2)$$

$$M = m_1 + m_2 \qquad X_{\mathrm{G}}(t) = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}; \qquad q_x \equiv x_1 - x_2$$

$$MX_{\mathrm{G}} + m_2q_x = (m_1x_1 + m_2x_2) + m_2(x_1 - x_2) = Mx_1 \tag{5.33}$$

$$MX_{\mathrm{G}} - m_1q_x = Mx_2 \tag{5.34}$$

$$x_1 = X_{\mathrm{G}} + \frac{m_2}{M}q_x, \qquad x_2 = X_{\mathrm{G}} - \frac{m_1}{M}q_x \tag{5.35}$$

この関係式から，運動エネルギーは

$$
\begin{aligned}
2T &= m_1\dot{x}_1^2 + m_2\dot{x}_2^2 \\
&= m_1\left(\dot{X}_{\mathrm{G}} + \frac{m_2}{M}\dot{q}_x\right)^2 + m_2\left(\dot{X}_{\mathrm{G}} - \frac{m_1}{M}\dot{q}_x\right)^2 \\
&= M\dot{X}_{\mathrm{G}}^2 + \frac{m_1m_2^2 + m_2m_1^2}{M^2}\dot{q}_x^2 \\
&= M\dot{X}_{\mathrm{G}}^2 + \mu\dot{q}_x^2
\end{aligned}
\tag{5.36}
$$

$$
T = \frac{1}{2}(m_1\dot{x}_1^2 + m_2\dot{x}_2^2) = \frac{1}{2}(M\dot{X}_{\mathrm{G}}^2 + \mu\dot{q}_x^2) \tag{5.32}
$$

X_{G} は重心座標 $\vec{R}_{\mathrm{G}}$ の x 座標である．

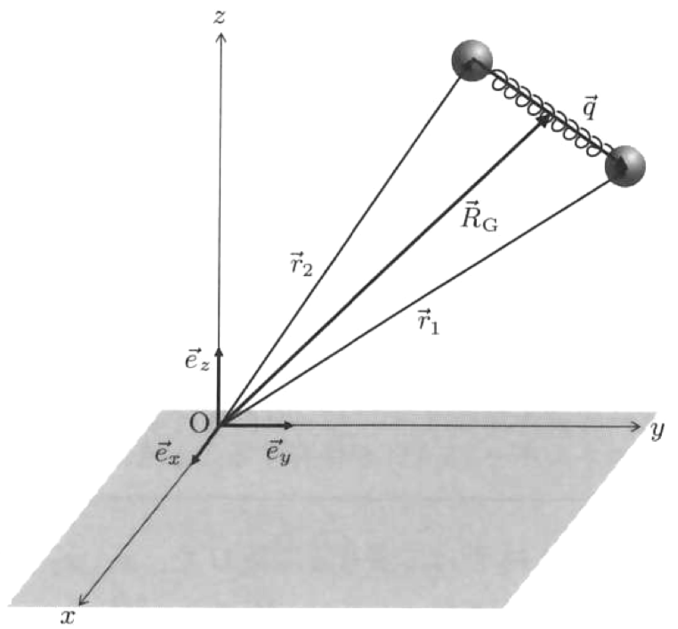
従って、エネルギーは

$$
E = \frac{1}{2}M\dot{X}_{\mathrm{G}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{q}_x^2 + U(q_x) \tag{5.31}
$$

となり，重心運動の運動エネルギーと相対運動のエネルギーに分解する

5.3.3　3 次元における相対運動

3 次元でも重心座標 $\vec{R}_{\mathrm{G}}$ と相対座標 $\vec{q}$ をそれぞれ



$$\vec{R}_{\mathrm{G}} \equiv \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{M} \tag{5.37}$$

$$\vec{q} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \tag{5.38}$$

それぞれの粒子にかかる力が保存力であり,ポテンシャルが相対座標にのみによる関数

$$\vec{F}_{2\to1} = -\nabla_1 U, \qquad \vec{F}_{1\to2} = -\nabla_2 U \tag{5.39}$$

ただし，∇_1 は座標 $\vec{r}_1$ に関する微分を，∇_2 は座標 $\vec{r}_2$ に関する微分

U が相対座標 $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ にのみによるとき、x_1, x_2 でそれぞれ偏微分すれば

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = -\frac{\partial U}{\partial x_2}$$

y, z 成分についても同様に考えて

$$\nabla_1 U(\vec{q}) = -\nabla_2 U(\vec{q}) \tag{5.40}$$

$$\vec{F}_{2\to1} = -\vec{F}_{1\to2}$$

作用・反作用の法則が成り立っていることがわかる.

外力が働いていないとすると,それぞれの粒子の運動方程式は,このポテンシャルを用いて

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = -\nabla_1 U, \qquad m_2\ddot{\vec{r}}_2 = -\nabla_2 U \tag{5.41}$$

【重心座標と相対座標の満たす運動方程式】

孤立系の重心の運動方程式は, 作用・反作 用の法則より

$$\ddot{\vec{R}}_{\mathrm{G}} = \vec{0} \tag{5.42}$$

相対座標の満たす運動方程式は

$$m_1 m_2 \ddot{\vec{r}}_1 = -m_2 \nabla_1 U$$

$$m_1 m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -m_1 \nabla_2 U$$

$$m_1 m_2 \left(\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2\right) = -m_2 \nabla_1 U + m_1 \nabla_2 U$$

$$\nabla_q U(\vec{q}) = \nabla_1 U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = -\nabla_2 U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

$$m_1 m_2 \left(\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2\right) = -(m_1 + m_2)\nabla_q U(\vec{q})$$

$$\mu\ddot{\vec{q}} = -\nabla_q U(\vec{q})$$

∇_q は相対座標 $\vec{q}$ に関する勾配を表す.

【力学的エネルギーの保存】

外力がない孤立系の場合,全力学的エネルギーは

$$E = T + U = \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}_{\mathrm{G}}^{2} + \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{q}}^{\,2} + U(\vec{q}) \tag{5.44}$$

$$\frac{dE}{dt} = M\dot{\vec{R}}_{\mathrm{G}} \cdot \ddot{\vec{R}}_{\mathrm{G}} + \mu\dot{\vec{q}} \cdot \ddot{\vec{q}} + \dot{\vec{q}} \cdot \nabla_q U(\vec{q})$$

$$\ddot{\vec{R}}_{\mathrm{G}} = \vec{0} \tag{5.42}$$

$$\mu\ddot{\vec{q}} = -\nabla_q U(\vec{q}) \tag{5.43}$$

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

保存することがわかる.

5.4 万有引力の法則

質量が m_1 と m_2 の 2 個の粒子があり,それぞれの座標が $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ であるとする.

粒子 1 に働く力は

$$\vec{F}_{2\to 1} = -\frac{G_{\mathrm{N}} m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2}\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \tag{5.45}$$

粒子 2 に働く力は作用・反作用の法則から

$$\vec{F}_{1\to 2} = -\frac{G_\mathrm{N} m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2}\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \tag{5.46}$$

相対座標 $\vec{q} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ を導入すると，万有引力は相対座標のみによるポテンシャル

$$U(\vec{q}) = -\frac{G_\mathrm{N} m_1 m_2}{|\vec{q}|} \tag{5.47}$$

で与えられる

粒子1を惑星とし粒子2を太陽と思えば,中心力の例と して取り上げたポテンシャルそのもの

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} \tag{4.70}$$

$\alpha = G_\mathrm{N} M m$ は，太陽の質量 M，惑星の質量 m，ニュートン定数 G_N

相対座標の満たす運動方程式は

$$\mu \ddot{\vec{q}} = -\nabla_q U(\vec{q}) \tag{5.48}$$

5.5　粒子系の角運動量

粒子系があるとき，n 番目の粒子の角運動量は

$$\vec{L}_n = \vec{r}_n \times \vec{p}_n \tag{5.51}$$

【2 体系の全角運動量】

2 体系の位置を重心座標 $\vec{R}_{\mathrm{G}}$ と重心を原点にとった座標でみた 1 番目と 2 番目の粒子の位置 $\vec{q}_n$ $(n = 1, 2)$ を用いて

$$\vec{r}_n = \vec{R}_{\mathrm{G}} + \vec{q}_n \tag{5.52}$$

$\vec{q}_n$ は重心を原点とする座標系での位置なので

$$m_1\vec{q}_1 + m_2\vec{q}_2 = \vec{0} \tag{5.53}$$

2 体運動の場合この座標を用いると，全角運動量 $\vec{L}_T$ は

$$\begin{aligned}
\vec{L}_T &\equiv m_1\vec{r}_1 \times \dot{\vec{r}}_1 + m_2\vec{r}_2 \times \dot{\vec{r}}_2 \\
&= m_1(\vec{R}_{\mathrm{G}} + \vec{q}_1) \times (\dot{\vec{R}}_{\mathrm{G}} + \dot{\vec{q}}_1) + m_2(\vec{R}_{\mathrm{G}} + \vec{q}_2) \times (\dot{\vec{R}}_{\mathrm{G}} + \dot{\vec{q}}_2) \\
&= (m_1 + m_2)\vec{R}_{\mathrm{G}} \times \dot{\vec{R}}_{\mathrm{G}} + (m_1\vec{q}_1 + m_2\vec{q}_2) \times \dot{\vec{R}}_{\mathrm{G}} \\
&\quad + \vec{R}_{\mathrm{G}} \times (m_1\dot{\vec{q}}_1 + m_2\dot{\vec{q}}_2) + m_1q_1 \times \dot{\vec{q}}_1 + m_2q_2 \times \dot{\vec{q}}_2 \\
&= M\vec{R}_{\mathrm{G}} \times \dot{\vec{R}}_{\mathrm{G}} + m_1q_1 \times \dot{\vec{q}}_1 + m_2q_2 \times \dot{\vec{q}}_2
\end{aligned} \tag{5.54}$$

$$\vec{L}_{\mathrm{G}} \equiv M\vec{R}_{\mathrm{G}} \times \dot{\vec{R}}_{\mathrm{G}} \tag{5.55}$$

は重心運動のもつ角運動量であり

$$\vec{l} \equiv m_1 q_1 \times \dot{\vec{q}}_1 + m_2 q_2 \times \dot{\vec{q}}_2 \tag{5.56}$$

は重心まわりの角運動量であることがわかる.

2 体系の全角運動量 $\vec{L}_T$ は，重心運動の角運動量 $\vec{L}_{\mathrm{G}}$ と重心まわりの回転に伴う角運動量 $\vec{l}$ に

$$\vec{L}_T = \vec{L}_{\mathrm{G}} + \vec{l} \tag{5.57}$$

【 N 体系の角運動量 】

N 体系の重心座標を $\vec{R}_{\mathrm{G}}$，n 番目の粒子の座標 $\vec{r}_n$ として, 全角運動量 $\vec{L}_T$ は

$$\begin{aligned}
\vec{L}_T &= \sum_{n=1}^{N} m_n \vec{r}_n \times \dot{\vec{r}}_n \\
&= M\vec{R}_{\mathrm{G}} \times \dot{\vec{R}}_{\mathrm{G}} + \sum_{n=1}^{N} m_n \vec{q}_n \times \dot{\vec{q}}_n \\
&= \vec{L}_{\mathrm{G}} + \vec{l}
\end{aligned} \tag{5.58}$$

重心運動の角運動量 $\vec{L}_{\mathrm{G}} = M\vec{R}_{\mathrm{G}} \times \dot{\vec{R}}_{\mathrm{G}}$

重心まわりの回転に伴う角運動量 $\vec{l} \equiv \sum_{n=1}^{N} m_n \vec{q}_n \times \dot{\vec{q}}_n$ に分解することができる.

問題： 2 a だけ離れた 2 本の平行線上を、二人のスケーターが互いに速度 v で近づき、
真横に来たとき手を握り合って回転を始めた。回転の角速度 ω はいくらか。ただし二人とも
質量 m の質点とみなしてよい。

角運動量保存則を用いる。
手を握った瞬間の角運動量は $mva\times 2$
角速度 ω で回転しているときの角運動量は $ma^2\omega\times 2$
両者が等しいので
$\omega = v/a$

5.6 衝　　突

5.6.1 力　　積

衝突の問題では, 力が一瞬に働くようにみえる

実際の衝突では, 互いに働 く力は接触してから徐々に大 きくなり, やがて離れていく。

このような現象を単純化して扱うために力積(inpulse)という量を導入する

【力積】

力積とは，働いた力を時間で積分したもので

$$\vec{J} \equiv \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\, dt \tag{5.59}$$

ここで，t_1, t_2 はそれぞれ衝突の始まりと衝突の終わりの瞬間

衝突 の前後は2個の粒子は自由粒子として扱ってよいと考える

力積の意味は運動方程式を時間積分することで理解できる．運動方程式を

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F} \tag{5.60}$$

左辺の時間積分は

$$
\int_{t_1}^{t_2} \dot{\vec{p}}\, dt = \vec{p}\,\Big|_{t_1}^{t_2}
$$

$$
= \vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1) = \Delta\vec{p} \tag{5.61}
$$

衝突前後の運動量の変化を与える これが (5.61) 右辺の時間積分である力積 (5.59) と等しい。

【衝突と第 2 法則】

力積を用いると，ニュートンの第 2 法則は

$$
\Delta\vec{p} = \vec{J} \tag{5.62}
$$

力積と運動量

衝突による運動量の変化は力積に等しい.

衝突前後の運動量の変化から力積を求めれば，衝突の間 $\Delta t = t_2 - t_1$ に働いていた平均の力が

$$
\vec{F}_{\text{average}} = \frac{\vec{J}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} \tag{5.63}
$$

5.6.2　2 個の粒子の衝突

2 個の粒子が正面衝突する場合を考える．衝突の関係式

$$\Delta\vec{p}_1 = \vec{J}_{2\to 1} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{2\to 1}\, dt \tag{5.64}$$

$$\Delta\vec{p}_2 = \vec{J}_{1\to 2} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{1\to 2}\, dt \tag{5.65}$$

作用・反作用の法則から，力積はちょうど大きさが同じで向きが反対

$$\Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2 \tag{5.66}$$

したがって，衝突の前後で運動量の変化は大きさが同じで向きが反対になる

衝突前後の運動量をそれぞれ $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ と $\vec{p}_1{}', \vec{p}_2{}'$ として

$$\vec{p}_1{}' - \vec{p}_1 = -(\vec{p}_2{}' - \vec{p}_2) \tag{5.67}$$

全運動量の保存則

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1{}' + \vec{p}_2{}' \tag{5.68}$$

と同じである

【反発係数】

反発係数 (coefficient of restitution)

$$e \equiv -\frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2} \leq 1 \tag{5.69}$$

ただし，衝突が直線上で起こり，その直線方向の速度 v_1, v_2 の粒子が衝突後の速度 v_1', v_2' になったとしている．反発係数は，粒子の材質によって大体一定になる

重心系で衝突を観測する場合を考える．重心系では全運動量は $\vec{0}$ になるので，式 (5.68) の両辺がそれぞれ $\vec{0}$ となり

$$-\frac{m_1}{m_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{v_2'}{v_1'} \tag{5.70}$$

これを反発係数の式に代入すると

$$e\left(v_1 + \frac{m_1}{m_2}v_1\right) = -\left(v_1' + \frac{m_1}{m_2}v_1'\right) \tag{5.71}$$

$$v_1' = -ev_1 \tag{5.72}$$

$$v_2' = -ev_2 \tag{5.73}$$

【運動エネルギーの変化と反発係数】

このような衝突の前後での運動エネルギーの変化は

$$\begin{aligned}\Delta E &= T' - T \\ &= \left\{\frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2\right\} - \left\{\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2\right\} \\ &= -T(1-e^2) \qquad (5.74)\end{aligned}$$

衝突前の運動エネルギー T に比べて，衝突後には運動エネルギーが $T(1-e^2)$ だけ減ったことになる.

$e = 1$ の場合は**完全弾性衝突** (perfect elastic collision) で，$\Delta E = 0$ が成り立ち，全運動エネルギーに変化はない．$e < 1$ の場合は**非弾性衝突** (inelastic collision) である.
特に，$e = 0$ の場合は**完全非弾性衝突**で，相対運動の運動エネルギーが 0 になる.